



# L'architecture du local et du global

*Des espaces topologiques aux topos de Grothendieck*

Catégories • Faisceaux • Homologie • Cohomologie • Topos



## LE PROBLÈME

# Le défi fondamental de la géométrie moderne

La géométrie algébrique moderne est née d'une question en apparence simple : comment assembler des informations locales en une compréhension globale cohérente ?



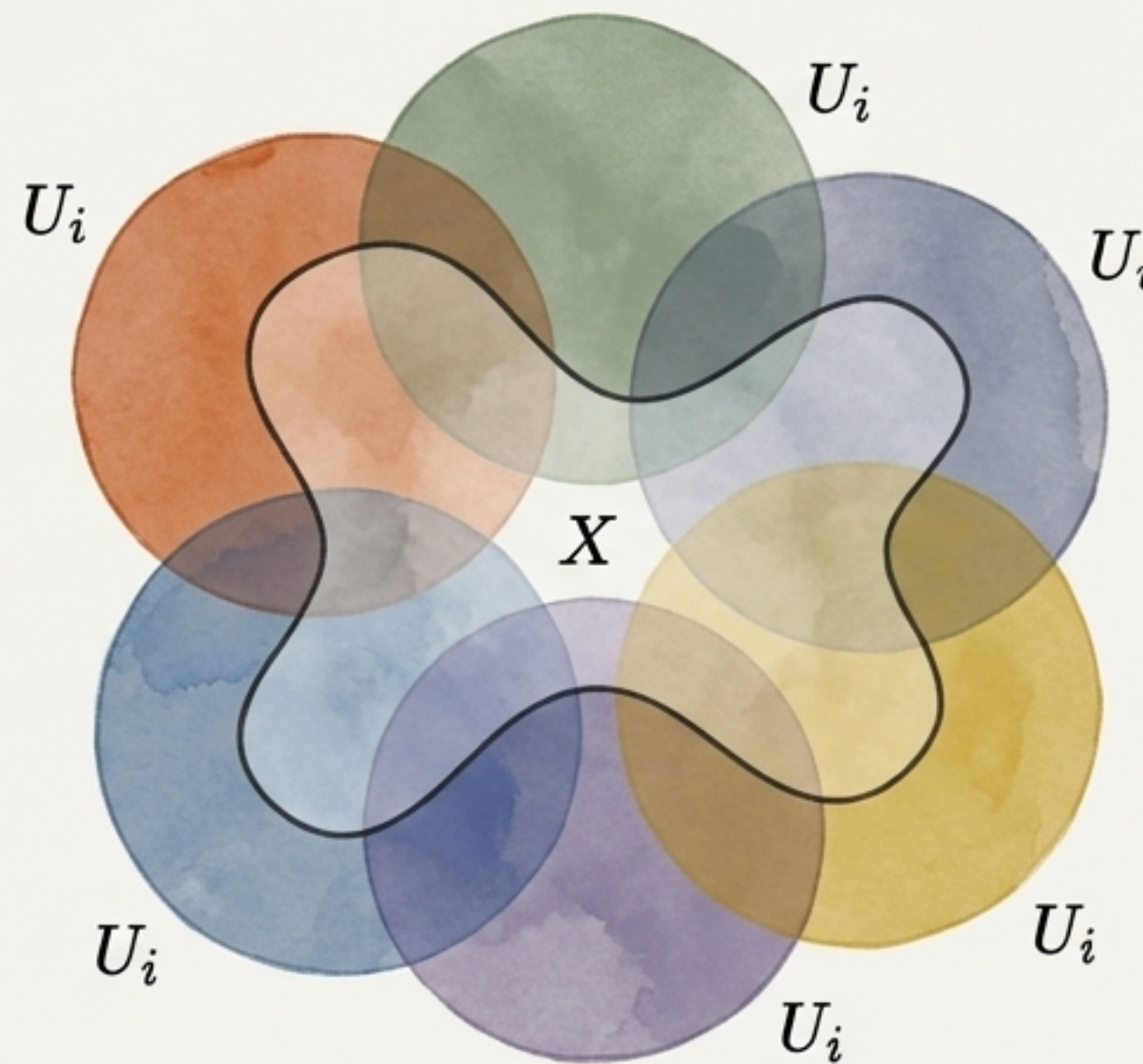
## Le Fil Directeur

Chaque concept introduit dans ce parcours est une réponse de plus en plus sophistiquée à cette même question : quand et comment les données locales se recollent-elles en données globales ? La cohomologie, en fin de compte, ne fera que mesurer les obstructions à ce recollement.

# L'espace topologique et la notion de recouvrement

L'espace topologique est la structure minimale permettant de parler de continuité sans notion de distance. Il repose sur la définition des ouverts.

- **Les Axiomes** : L'ensemble vide  $\emptyset$  et l'espace entier  $X$  sont ouverts. Les unions et les intersections finies d'ouverts restent ouvertes.
- **Le Recouvrement** : Une famille d'ouverts  $(U_i)$  dont l'union forme l'espace total  $X$ .

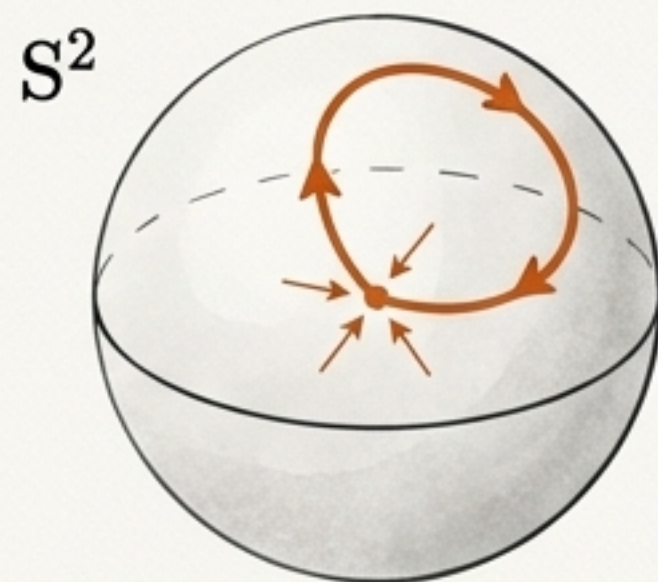


## Vers les sites

Le recouvrement est le concept central. Grothendieck réalisera plus tard que cette notion n'a pas besoin d'être géométrique — elle peut être axiomatisée dans n'importe quelle catégorie. C'est l'idée-germe des futurs topos.

# Capter la forme globale par l'homotopie

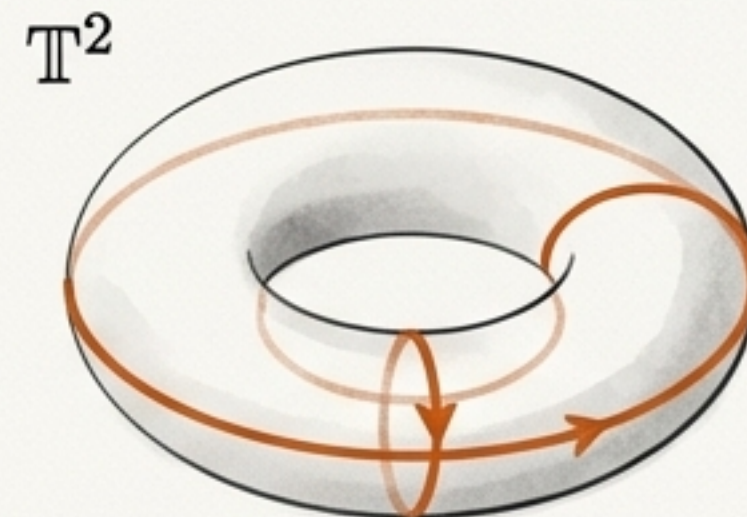
L'homotopie est une relation d'équivalence qui oublie les détails géométriques fins pour ne garder que la forme globale de l'espace.



Sphère ( $S^2$ ) :  $\pi_1 = 0$   
L'espace est simplement connexe.  
Aucun trou de dimension 1.



Cercle ( $S^1$ ) :  $\pi_1 = \mathbb{Z}$   
Le groupe compte le nombre  
de tours effectués.



Tore ( $\mathbb{T}^2$ ) :  $\pi_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$   
Deux générateurs indépendants  
correspondant aux cycles fondamentaux.

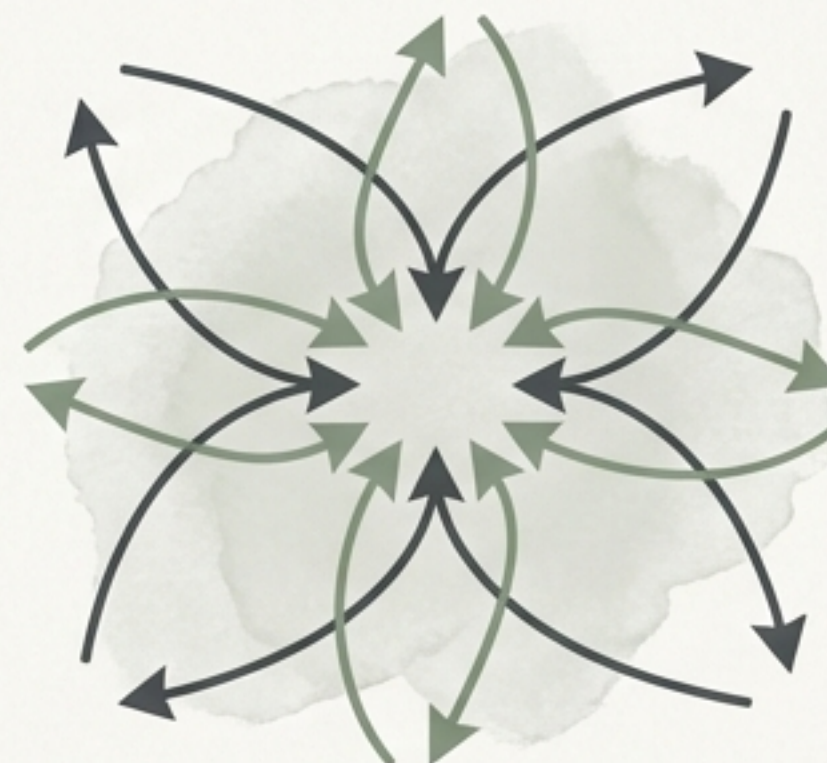
Le Groupe Fondamental  $\pi_1(X, x_0)$  : L'ensemble des classes d'homotopie de lacets basés en  $x_0$ .  
Le tout premier invariant topologique d'un espace connexe.

# Le changement de paradigme catégorique



## L'Approche Intrinsèque

Étudier ce que l'objet est. L'approche classique isole l'objet pour disséquer sa structure interne (ex: les éléments d'un ensemble).



## L'Approche Extrinsèque

Étudier ce que l'objet fait. Fondée par Eilenberg et Mac Lane (1945), la théorie des catégories postule qu'un objet n'est rien sans ses flèches (morphismes).

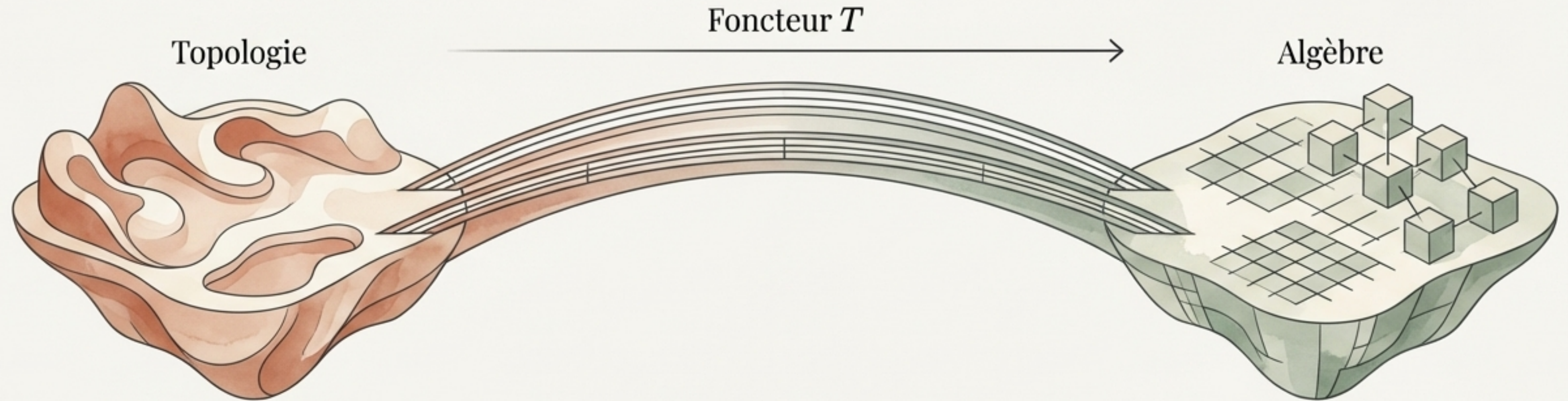


Le Lemme d'Yoneda :  $\text{Nat}(\text{Hom}_C(c, -), F) \cong F(c)$

Un objet  $c$  est entièrement déterminé à isomorphisme unique près par l'ensemble de ses relations  $\text{Hom}_C(c, -)$  avec tous les autres objets.

# Les foncteurs comme traducteurs universels

Si les catégories sont les objets, les foncteurs sont les morphismes entre elles. Ils transportent un problème d'un domaine complexe vers un domaine calculable, tout en garantissant la cohérence structurelle.



- **Foncteur Covariant :**

Conserve la direction des flèches.  
(Ex: Homologie singulière  $H_n(-)$ ).

- **Foncteur Contravariant :**

Inverse la direction des flèches.  
(Ex: Fonctions continues  $\mathbb{C}(-, \mathbb{R})$ ).

- **Transformations Naturelles :**

Comparent les foncteurs entre eux. Exigent que le diagramme  $\tau_{c'} \circ S f = T f \circ \tau_c$  commute.

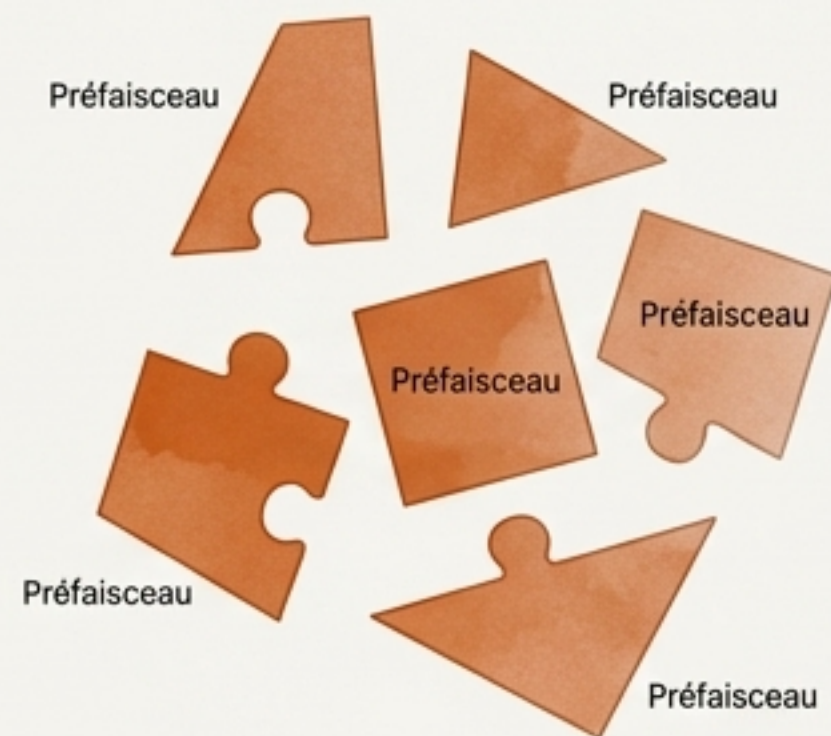
## Adjonctions et universalité

« Les foncteurs adjoints surgissent partout. » – Mac Lane.

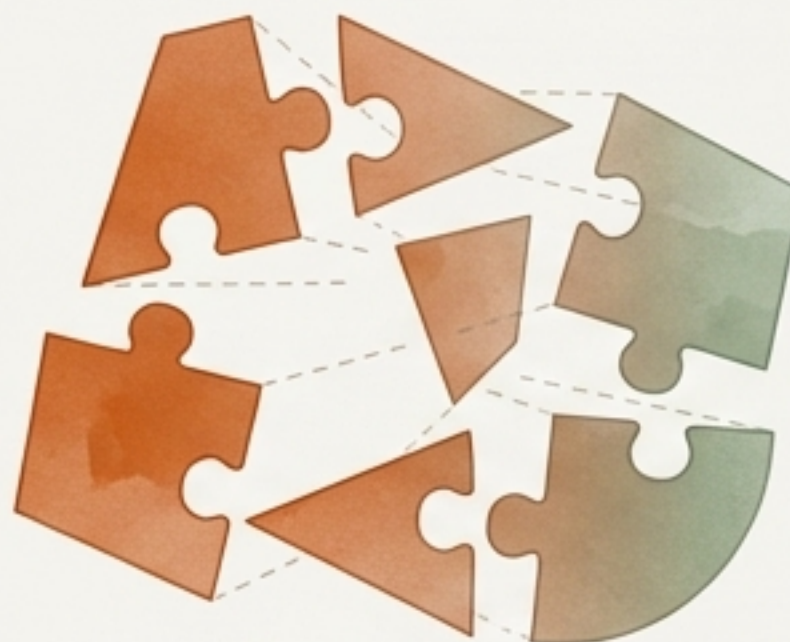
Une bijection naturelle  $\text{Hom}_D(F(c), d) \cong \text{Hom}_C(c, G(d))$  garantit que des constructions comme le groupe libre se font indépendamment de tout choix arbitraire.

# Préfaisceaux et Faisceaux : Résoudre le puzzle

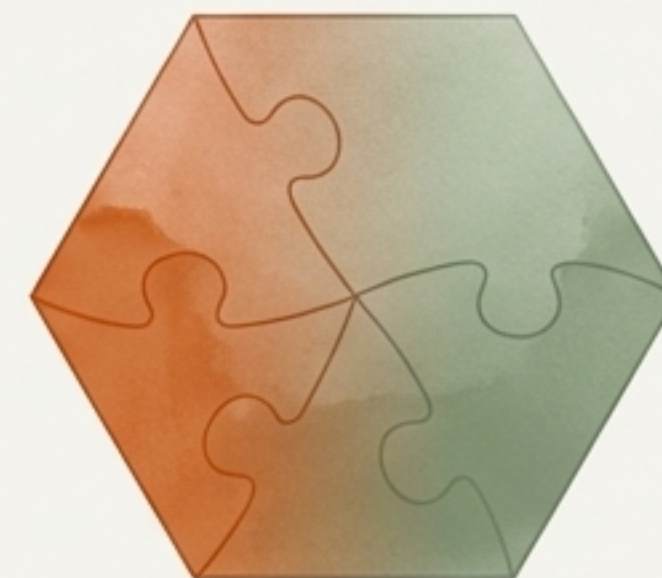
Comment des données définies sur des ouverts se recollent-elles en une réalité globale ?



Préfaisceau



Séparation & Recollement



Faisceau

## Le Préfaisceau (Les pièces) :

Un foncteur contravariant  $F : \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{C}$ .

À chaque ouvert  $U$ , il associe des sections  $F(U)$ .

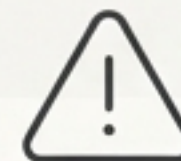
Les morphismes de restriction  $\rho_{UV}$  retaillent ces données.

## Le Faisceau (L'assemblage) :

Un préfaisceau devient un faisceau s'il satisfait deux axiomes pour tout recouvrement :

1. **Séparation** (Unicité) : Si deux sections coïncident sur chaque intersection, elles sont identiques.
2. **Recollement** (Existence) : Si des sections locales sont compatibles sur leurs intersections, il existe une section globale unique qui les prolonge.

# L'obstruction topologique : Quand le global échoue



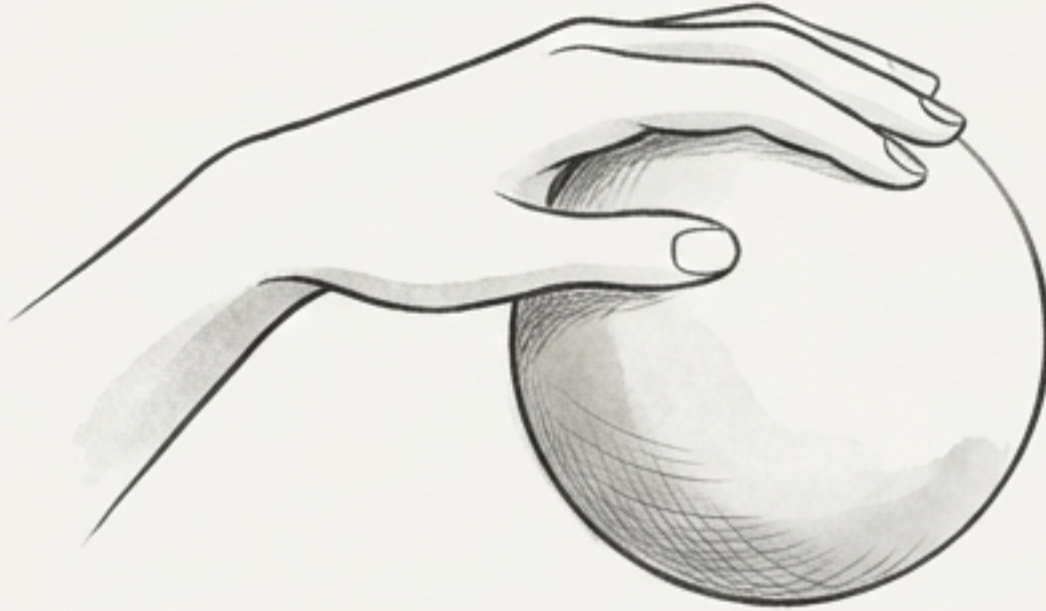
## L'échec du recollement

Le ruban de Möbius illustre parfaitement la différence entre un préfaisceau et un faisceau d'orientations.

- **Localement** : Le ruban est orientable. Des sections locales existent parfaitement.
- **Globalement** : Il ne l'est pas. Aucune section globale ne peut exister sans créer de contradiction.

Cette impossibilité géométrique n'est pas un défaut : c'est une donnée fondamentale. C'est précisément cette **obstruction** que la **cohomologie** va s'employer à mesurer avec précision.

# Détecter les trous dans l'obscurité



## Homologie (Les Cycles)

On approxime l'espace par des simplexes combinatoires.

$$H_n(X) = \text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1})$$

On quotiente les cycles par les bords. Deux cycles sont équivalents s'ils encerclent le même trou.

## Cohomologie (L'Inversion)

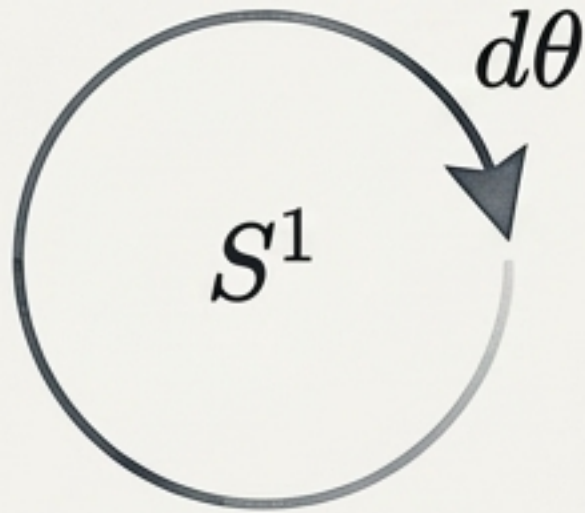
On retourne les flèches en appliquant un foncteur  $\text{Hom}(-, A)$ .

$$H^n(X; A) = \text{Ker}(d^n) / \text{Im}(d^{n-1})$$

Plus riche que l'homologie : le produit-cup lui donne une structure d'anneau gradué. Encode des informations géométriques inaccessibles à l'homologie seule.

# Deux langages pour mesurer l'obstruction

---

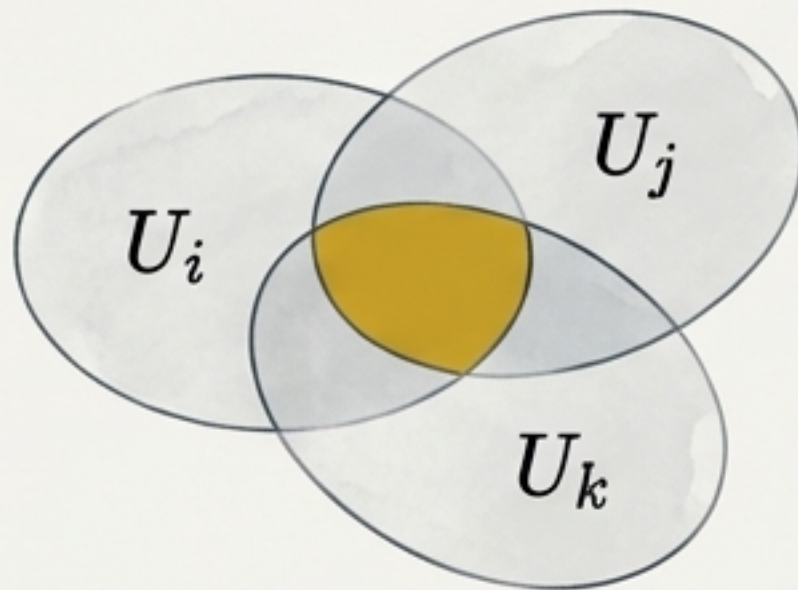


## Cohomologie de De Rham

**Formes différentielles.**  $H_{\text{DR}}^p(M) = \{\text{formes fermées}\} / \{\text{formes exactes}\}$ .

Sur le cercle  $S^1$ , la forme  $d\theta$  est fermée ( $d(d\theta) = 0$ ) mais pas exacte (impossible de définir un angle  $\theta$  continu sur tout le cercle). La classe  $[d\theta]$  dans  $H_{\text{DR}}^1 = \mathbb{R}$  capture l'obstruction.

---



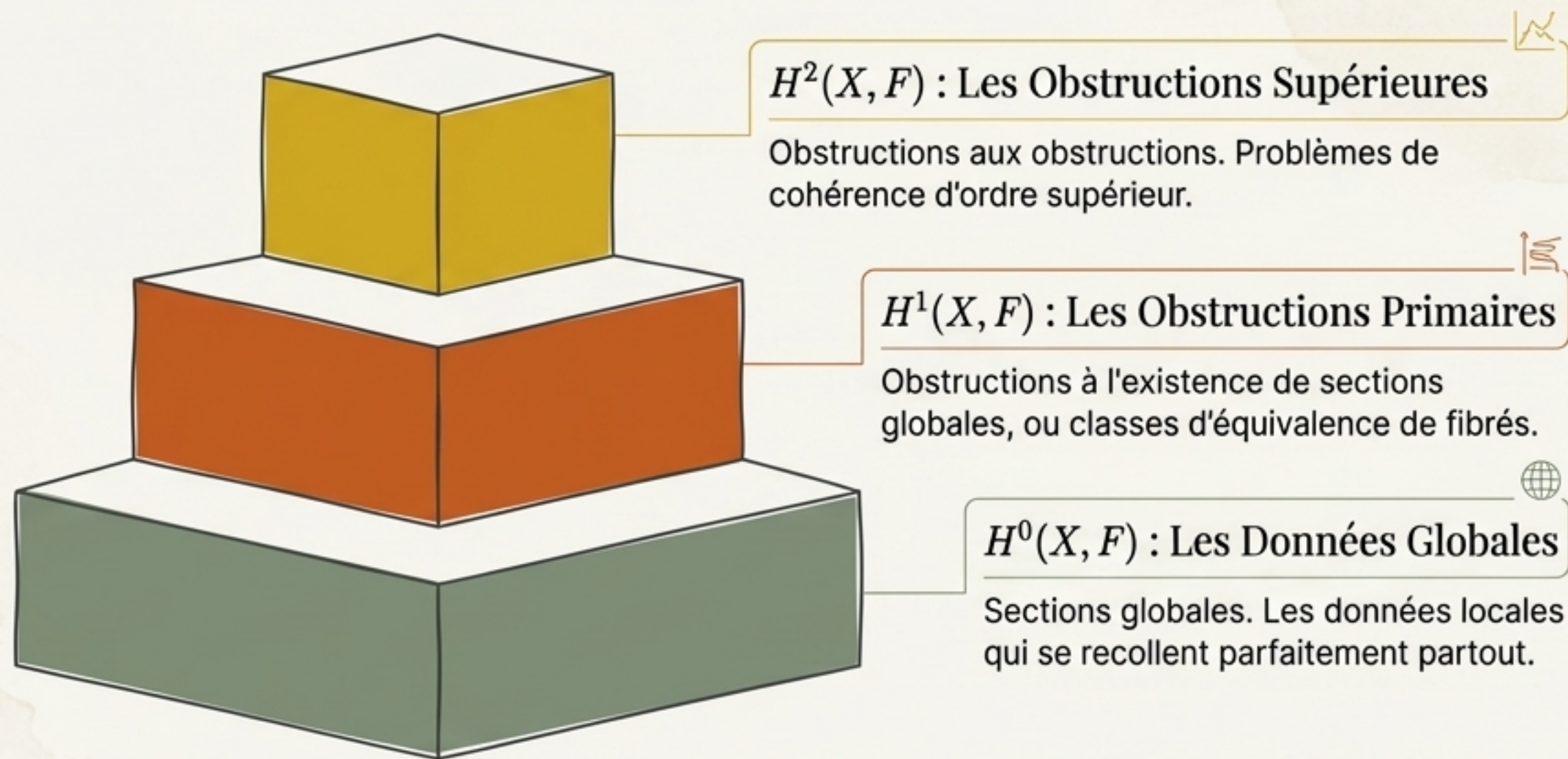
## Cohomologie de Čech

**Recouvrements.** On mesure les obstructions au recollement local.

Un cocycle de degré 1 est une collection de sections satisfaisant la condition  $s_{ij} + s_{jk} = s_{ik}$  sur  $U_i \cap U_j \cap U_k$ . Le théorème de De Rham prouve que ces théories coïncident.

# La machine de Grothendieck

Introduite en 1957 (Tôhoku), la cohomologie des faisceaux unifie toutes les théories précédentes. Elle repose sur les foncteurs dérivés : le foncteur des sections globales  $\Gamma(X, -)$  n'est exact qu'à gauche. Les groupes  $H^n$  mesurent précisément cette défaillance.



# Le triomphe local-global : Gauss-Bonnet

$$\iint_M K dA = 2\pi \chi(M)$$

Le **théorème de Gauss-Bonnet** est le paradigme de la géométrie algébrique moderne traduite par les faisceaux.

- **Le Local (K)** : La courbure locale, une donnée purement différentielle (les sections locales du faisceau).

- **Le Global ( $\chi$ )** : La caractéristique d'Euler, un invariant purement topologique global ( $\chi = \sum (-1)^n \dim H^n$ ).

Les sections locales s'intègrent en un invariant global cohomologique.

# Les Topos : La géométrie sans points

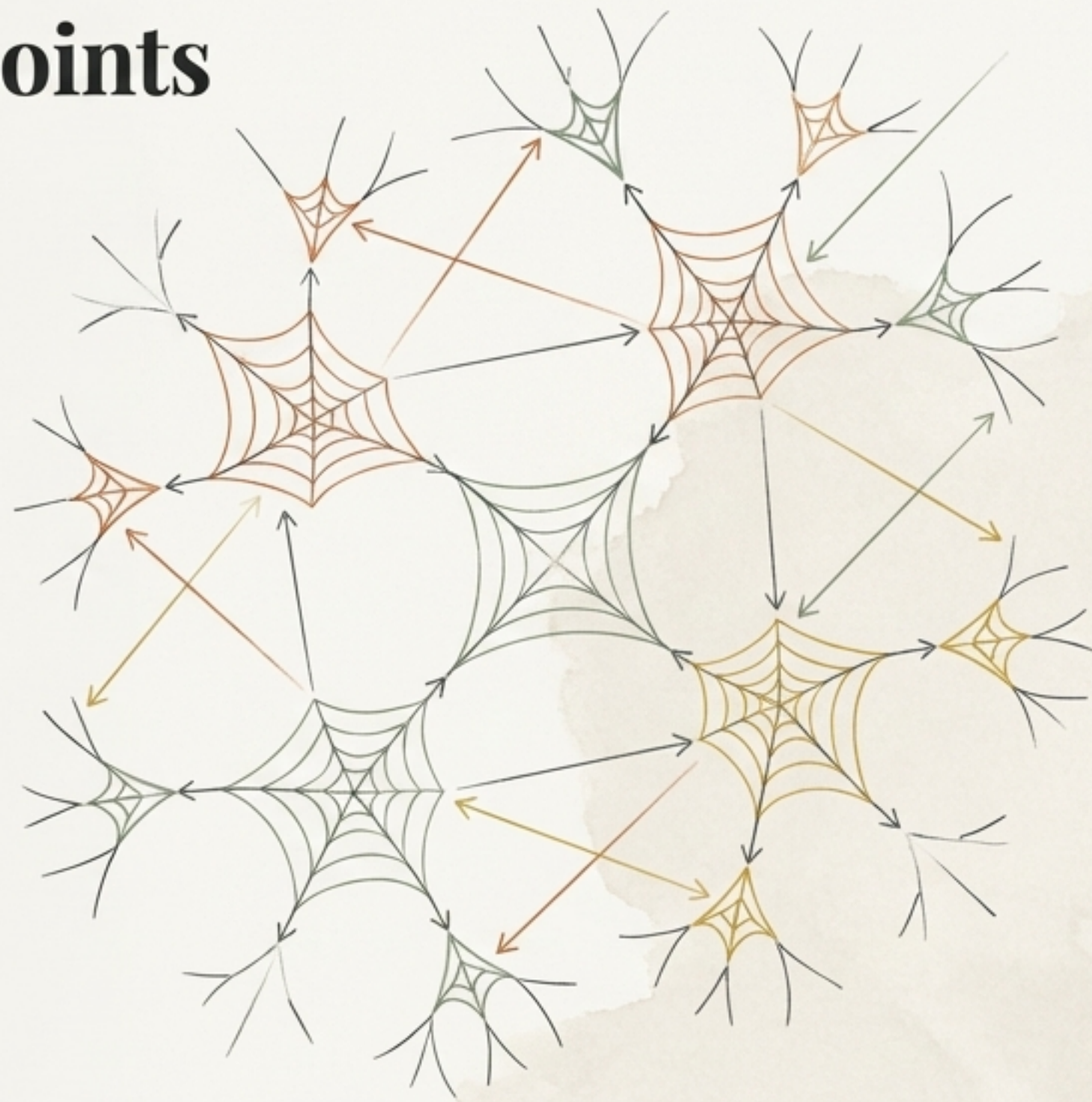
Grothendieck a observé que la notion de faisceau ne dépend que de la structure de recouvrement, pas de la nature des points.



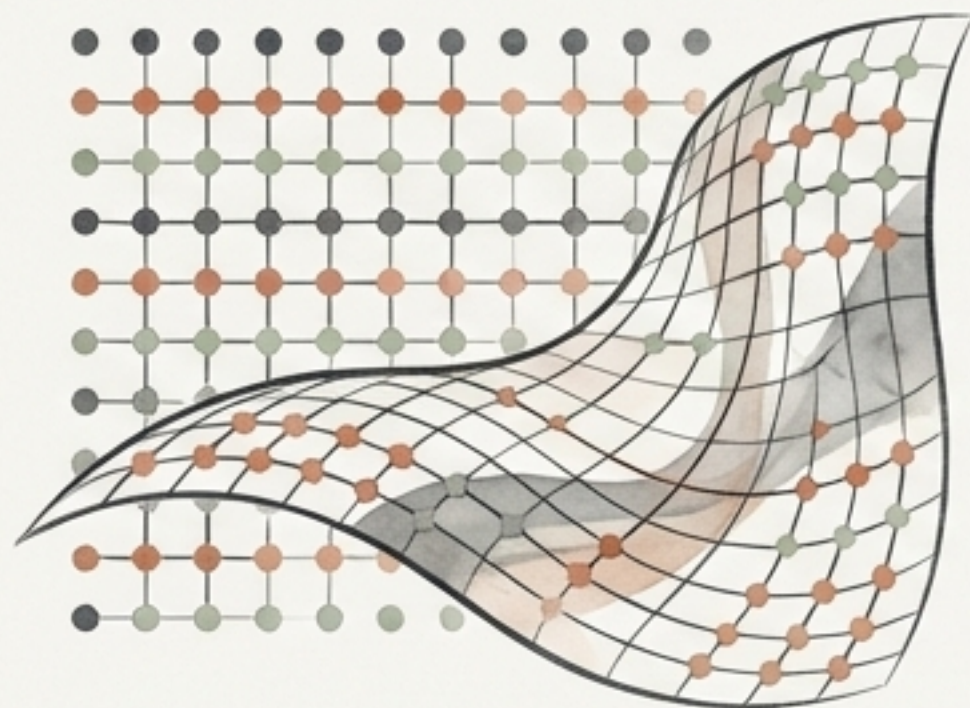
### Le Site de Grothendieck

Un site  $(C, J)$  est une catégorie abstraite munie d'une topologie  $J$  (un crible) qui encode ce que signifie recouvrir sans jamais faire appel à l'espace physique.

- **Le Topos** : La catégorie des faisceaux d'ensembles sur un site. Un univers mathématique complet.
- **Logique interne** : La logique des faisceaux est intuitionniste. Le principe du tiers exclu n'y est pas garanti (vrai localement n'est pas vrai absolument).
- **Espaces virtuels** : Certains topos géométriquement significatifs ne possèdent strictement aucun point.



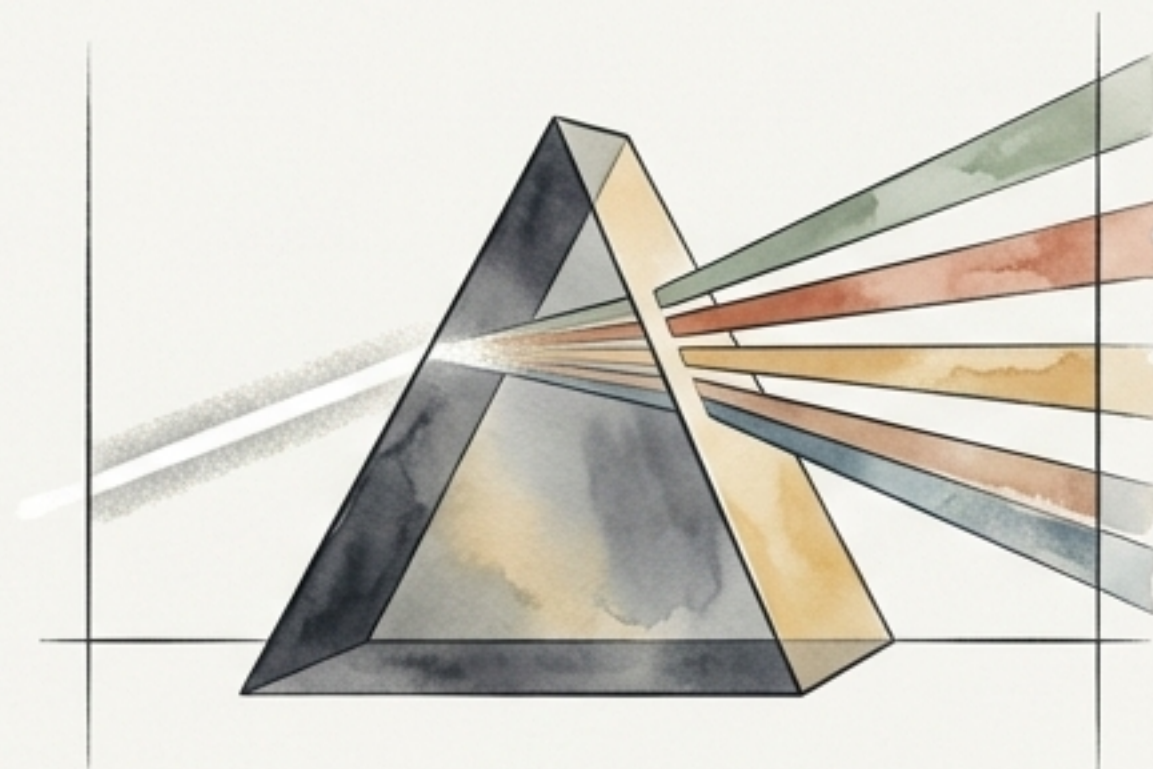
# Triumphes et rêves inachevés



## La Cohomologie Étale

**Les Conjectures de Weil.** Pour résoudre ces conjectures arithmétiques, Grothendieck a inventé le site étale (analogue algébrique des revêtements locaux). Le topos associé a généré la cohomologie  $\ell$ -adique.

Résultat : Deligne prouve les conjectures en 1974, l'une des plus grandes réussites du XX<sup>e</sup> siècle. Voevodsky suivra avec la cohomologie motivique (Médaille Fields 2002).

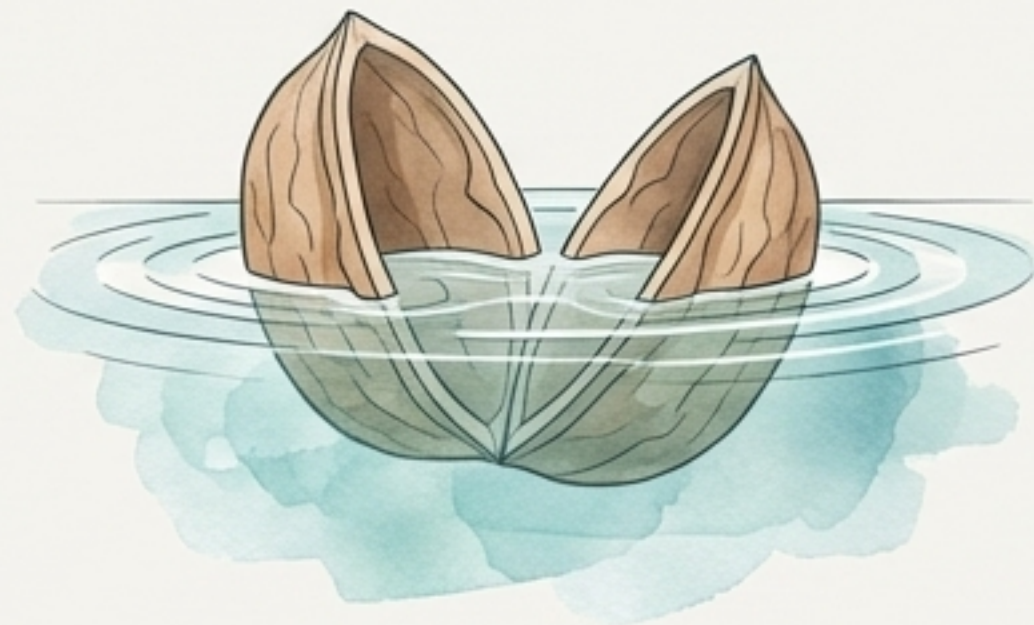


## Les Motifs

**Le rêve ultime.** Unifier toutes les théories cohomologiques (De Rham, Betti,  $\ell$ -adique) en une seule théorie universelle : les Motifs. Chaque théorie existante n'en serait qu'une réalisation spécifique.

Ce programme gigantesque reste, aujourd'hui encore, largement ouvert.

# L'immersion : La méthode de Grothendieck



Le chemin parcouru — des ouverts topologiques aux catégories, faisceaux, suites exactes et topos — révèle une unité profonde. Grothendieck ne faisait pas des mathématiques techniques, il dégagait l'architecture conceptuelle des phénomènes.



## La Philosophie du Flot

« Il ne brise pas l'écrou à coup de marteau — il immerge lentement l'écrou dans le flot montant des mathématiques jusqu'à ce qu'il s'ouvre de lui-même. »

Généraliser le cadre (Topologie  $\rightarrow$  Catégories  $\rightarrow$  Faisceaux  $\rightarrow$  Topos) jusqu'à ce que le problème particulier devienne transparent.

**Le local et le global ne sont pas des contraires, mais des perspectives complémentaires. Les faisceaux les articulent.  
La cohomologie mesure leur tension. Et les topos sont l'univers où cette tension devient féconde.**